ANIQ INTEGRAL, XOSSALARI. N'YUTON-LEYBNITS FORMULASI KEYS BO`YICHA O`QITILISHI

https://doi.org/10.5281/zenodo.11397805

Darmonova Adolat Bahodir qizi
Chirchiq davlat pedagogika universiteti

Annotatsiya: *Maqolada " Aniq integral, xossalari. Nyuton Leybnits formulasi keys bo`yicha o`qitilishi yoritilgan. Talabalarni mashg`ulot jarayonida og'zaki va yozma bayon qilish, axborot texnologiyasi, matn bilan ishlash, o`rganilgan materialni yodida saqlab qolish, so`zlab berish fikrini aniq bayon eta olish hamda bir dars davomida talabalarni baholay olishga qaratilgan.*

**Kalit so`zlar:** *Aniq integral, Nyuton-Leybnits formulasi, Keys, dars, talaba, o`qituvchi, mavzu, baholash, guruh, o`quv material.*

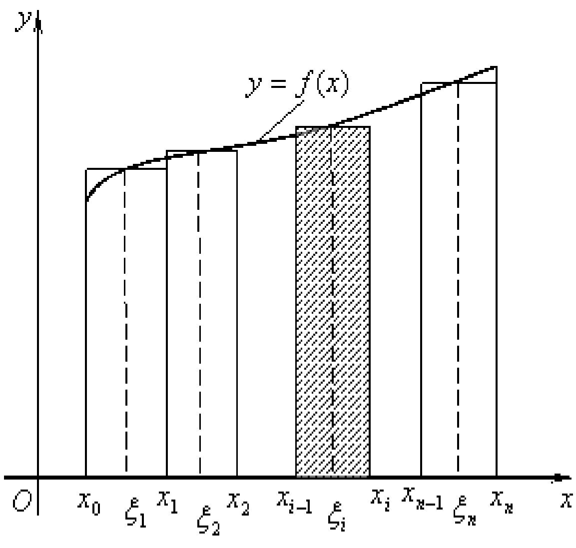
1. Aniq integral tushunchasiga olib keluvchi masalalar.

Aniq integral tabiat va texnikaning bir qancha masalalarini yechishda, xususan har xil geometrik va fizik kattaliklarni hisoblashda keng qo'llaniladi.

EGRI CHIZIQLI TRAPETSIYANING YUZASI MASALASI

Tekislikda Oxy to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan va $[a;b]$ $b > a$, kesmada uzluksiz va manfiy bo'lmagan $y = f(x)$, ya'ni $f(x) \geq o$ funksiya aniqlangan bo'lsin.

Yuqoridan $y = f(x)$, funksiya grafigining yoyi bilan, quyidan Ox o'qning $[a;b]$ kesmasi bilan, yon tomonlaridan $x = a$, $o \leq y \leq f(a)$ va $x = b, o \leq y \leq f(b)$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan $aABb$ figuraga *egri chiziqli trapetsiya* deyiladi (2-shakl).



2-shakl

$aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasiga ta'rif beramiz. $[a;b]$kesmani n ta kichik kesmalarga bo'lamiz: bo'linish nuqtalarining abssissalarini

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

bilan belgilaymiz. $\{x_i\}\{x_0; x_1; \dots; x_n\}$bo'lishnuqtalari to'plamini $[a;b]$ kesmaning bo'linishi deymiz. x_i bo'linish nuqtalari orqali Oy o'qqa parallel $x = x_i$ to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlar $aABb$ trapetsiyani asoslari $[x_{i-1}; x_i]$ bo'lgan n ta bo'lakka bo‘ladi. $aABb$ trapetsiyaning S yuzasi n ta tasma yuzalarining yig‘indisiga teng bo‘ladi. n yetarlicha katta va barcha $[x_{i-1}; x_i]$ kesmalar kichik bo‘lganida har bir n ta tasmaning yuzasini husoblash oson bo‘lgan mos to‘g‘ri to‘trburchakning yuzasi bilan almashtirish mumkin bo‘ladi. Har bir $[x_{i-1}; x_i]$ kesmada biror ξ_i nuqtani tanlaymiz, $f(x)$ funksiyaning bu nuqtadagi qiymati $f(\xi_i)$ ni hisoblaymiz va uni to‘g‘ri to‘rtburchakning balandligi deb qabul qilamiz. $[x_{i-1}; x_i]$ kesma kichik bo‘lganida $f(x)$uzluksiz funksiya bu kesmada kichik o‘zgarishga ega bo‘ladi. Shu sababli bu kesmalarda funksiyani o‘zgarmas va taqriban $f(\xi_i)$ teng deyish mumkin. Bitta tasmaning yuzasi $f(\xi_i)$ $(x_i - x_{i-1}$) ga

teng bo‘lganidan $aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning S yuzasi taqriban S_n teng bo‘ladi:

$$S \approx S_n = \sum_{i-1}^{n} f(\xi_i)\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad (14.1)$$

(14.1) taqribiy qiymat $d = \max_i \Delta x_i \quad i = \overline{1, n}$ kattalik qancha kichik bo‘lsa shuncha aniq bo‘ladi. d kattalikka x_i bo‘linishning diametri deyiladi. Bunda

$n \to \infty$ da $\to o$.

Shunday qilib, *egri chiziqli trapetsiyning S yuzasi* deb, S_n to‘g‘ri to‘rtbur-chaklar yuzasining bo‘linish diametri nolga intilgandagi limitiga aytiladi, ya’ni

$$S = \lim_{d\to 0} S_n = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (14.2)$$

Demak, egri chiziqli trapetsiyaning yuzasini hisoblash masalasi (14.2) ko‘rinishdagi limitni hisoblashga keltiriladi.

Egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi masalasiga qaytamiz. (14.2) tenglikning o‘ng tomoni integral yig‘indidan iborat. U holda (14.5) formuladan *aniq integralning geometrik ma’nosi* kelib chiqadi: agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada integrallanuvchi va manfiy bo‘lmasa, u holda $[a;b]$ kesmada $f(x)$ funksiyadan olingan aniq integral $y = f(x) \ge 0,\ y = 0,\ x = a,\ x = b$ $a < b$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasiga teng.

Misol

$\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}dx$ integralni uning geometrik ma’nosiga tayanib hisoblaymiz.

Bunda x ning -3 dan 3 gacha o‘zgarishida tenglamasi $y = \sqrt{9 - x^2}$ bo‘lgan chiziq $x^2 + y^2 = 9$ aylananing yuqori bo‘lagidan iborat bo‘ladi. Shu sababli $x = -3,\ x = 3,\ y = 0,\ y = \sqrt{9 - x^2}$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya $x^2 + y^2 = 9$ doiraning yuqori qismidan tashkil topadi. Uning yuzi $S = \frac{9\pi}{2}$ ga teng.

Demak,

$$\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}dx=\frac{9\pi}{2}.$$

Endi bosib o‘tilgan yo‘l masalasiga o‘tamiz. (14.3) tenglikning o‘ng tomoni integral yig‘indidan iborat bo‘lgani uchun (14.5) formuladan ushbu xulosaga kelamiz: agar $v(t)$ funksiya $[a;b]$, $a<b$ kesmada integrallanuvchi va manfiy bo‘lmasa, u holda $v(t)$ tezlikdan $[a;b]$ vaqt oralig‘ida olingan aniq integral material nuqtaning $t=a$ dan $t=b$ gacha vaqt oralig‘ida bosib o‘tgan yo‘liga teng.

Bu jumla *aniq integralning mexanik ma’nosini* anglatadi.

2. Aniq integralning xossalari

1^o. Agar integral ostidagi funksiya birga teng bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b dx=b-a$$

bo‘ladi.

2^o. Ozgarmas ko‘paytuvchini aniq integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya’ni

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx,\ k=const.$$

3^o. Chekli sondagi funktsiyalar algebraik yig‘indisining aniq integrali qo‘shiluvchilar aniq integrallarining algebraik yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\int_a^b (f(x)\pm\varphi(x))dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b \varphi(x)dx.$$

4^o. Agar $[a;b]$ kesma bir necha qismga bo‘lingan bo‘lsa, u holda $[a;b]$ kesma bo‘yicha olingan aniq integral har bir qism bo‘yicha olingan aniq integrallar yig‘indisiga teng bo‘ladi. Masalan,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx,\ c\in[a;b].$$

5^o. Agar $[a;b]$ kesmada funksiya o‘z ishorasini o‘zgartirmasa, u holda funksiya aniq integralining ishorasi funksiya ishorasi bilan bir xil bo‘ladi, ya’ni:

$[a;b]$da $f(x)\ge 0$ bo‘lganda $\int_a^b f(x)dx\ge 0$;

$[a;b]$da $f(x)\le 0$ bo‘lganda $\int_a^b f(x)dx\le 0$.

6^o. Agar $[a;b]$ kesmada $f(x)\ge\varphi(x)$ bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b \varphi(x)dx$$

bo‘ladi.

7°. Agar m va M sonlar $f(x)$funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlarii bo'lsa, u holda

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

bo'ladi.

Bu xossa aniq integralni *baholash haqidagi teorema* deb yuritiladi.

1. Nyuton-Leybnis formulasi

Aniq integralni integral yig'indining limiti sifatida hisoblash hatto oddiy funksiyalar uchun ham ancha qiyinchiliklar tug'diradi. Shu sababli aniq integralni hisoblashning (15.3) formulaga asoslangan, amaliy jihatdan qulay bo'lgan hamda keng qo'llaniladigan usuli bilan tanishamiz.

2-teorema (*integral hisobning asosiy teoremasi*). Agar $F(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda $[a;b]$ kesmada $f(x)$ funksiyadan olingan aniq integral $F(x)$ funksiyaning integrallash oralig'idagi orttirmasiga teng bo'ladi, ya'ni

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (15.4)$$

(15.4) formulaga *Nyuton-Leybnis formulasi* deyiladi.

$F(b) - F(a)$ ayirmani shartli ravishda $F(x)\Big|_a^b$ deb yozish kelishilgan.

Bu kelishuv natijasida Nuyton-Leybnis formulasi

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \qquad (15.5)$$

ko'inishda ifodalanadi.

Misollar

1. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\Big|_0^3 = \ln\left|3+\sqrt{10}\right| - \ln 1 = \ln\left|3+\sqrt{10}\right|$.

2. $\int_1^4 \frac{dx}{x^2-2x+10} = \int_1^4 \frac{dx}{(x-1)^2+3^2} = \frac{1}{3} arctg\frac{x-1}{3}\Big|_1^4 = \frac{1}{3}(arctg1 - arctg0) = \frac{\pi}{12}.$

Nyuton-Leybnis formulasidan uning qo'llanish shartlarini hisobga olmagan holda formal foydalanish xato natijaga olib kelishi mumkin.

Masalan, $\frac{1}{4+x^2}$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya sifatida $arctg\frac{x}{2}$ ni yoki $arcctg\frac{2}{x}$ ni olish mumkin. Avval $F(x) = arctg\frac{x}{2}$ deb olamiz:

$$\int_{-2}^{2}\frac{dx}{4+x^2}=\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}\Big|_{-2}^{2}=\frac{1}{2}(arctg1-arctg(-1))=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Bunda Nyuton-Leybnis formulasi to‘g‘ri qo‘llanildi, chunki $F(x)=arctgx$ funksiya $[-2;2]$ kesmada uzluksiz va $F'(x)=f(x)$ tenglik butun kesmada bajariladi.

Endi $F(x)=arcctg\,\frac{2}{x}$ deb olamiz:

$$\int_{-2}^{2}\frac{dx}{4+x^2}=\frac{1}{2}arcctg\frac{2}{x}\Big|_{-2}^{2}=\frac{1}{2}(arcctg1-arcctg(-1))=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}.$$

Bunda Nyuton-Leybnis formulasi noto‘g‘ri (formal) qo‘llanildi, chunki $x=0$ da $arcctg\,\frac{1}{x}$ funksiya uzilishga ega va u $[-2;2]$ kesmada boshlang‘ich funksiya bo‘la olmaydi. Natijada xatolik $\left(-\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{4}\right)$ kelib chiqdi.

Demak, Nyuton-Leybnis formulasini qo‘llashda $F(x)$ boshlang‘ich funksiya berilgan kesmada uzluksiz deb faraz qilinadi (ayrim shartlarda Nyuton-Leybnis

formulasi uzilishga ega bo‘lgan funksiyalar uchun ham o‘rinli bo‘lishi mumkin).

KEYS – 1.

Xonadon hovlisi maydoni uchun soliq to`lashi lozim. Soliq miqdorini aniqlash uchun hovli maydonining yuzasini bilish kerak. Hovli yuzasining maydoning yuzasi topilsin.

Yechilishi:

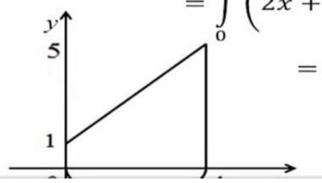
$f_1(x)=x+1,\ f_2(x)<0,$ (2;-1) $(x_0=2, y_o=-1)$

$(x-x_0)^2=2p(y-y_0),\ p=2,\ (0;0), f_2(x)=\frac{x^2}{4}-x$

$$S=\int_0^4[f_1(x)-f_2(x)]dx=\int_0^4\left(x+1-\frac{x^2}{4}+x\right)dx=$$

$$=\int_0^4\left(2x+1-\frac{x^2}{4}\right)dx=\left(x^2+x-\frac{x^3}{12}\right)\Big|^4=$$

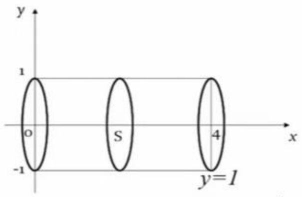
$$=16+4-\frac{64}{12}=14\frac{2}{3}\ \text{kv.br.}$$



KEYS-2.

Uzunligi 4metr va diametric 2metr bo`lgan sisternali suv tashiydigan mashina yordamida, o`lchovlari 6;8;3,5 metrga teng bo`lgan hovuzni yuqori chegarasiga 0,5 metr qolgunicha to`ldirishi uchun necha marta suv tashib keltirilishi kerak.

Yechilishi:



$$V_{ts.} = \pi \int_0^4 y^2 dx\, \pi \int_0^4 1dx = \pi x \Big|_0^4 = 4\pi \approx 4 \cdot 3 = 12$$
kub.br.

$$V_{hovuz} = 6 \cdot 8 \cdot 3 = 144 \text{ kub.br.}$$
$$144 : 12 = 12 \text{ marta}$$

KEYS-3.

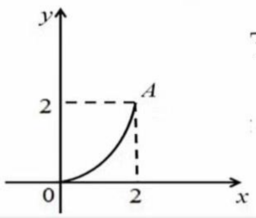
Akbar akaga, uning fermer xo`jaligiga qarashli yerdan o`tgan zovur kanalini tozalash vazifasi qo`yildi. Akbar aka ish hajmini hisoblab chiqishi uchun zovur kanalining uzunligini bilish kerak. Zovur kanalining uzunligini toping.

Yechilishi:

3 keysning echilishi. $x^2 = 2py,\ p=?,\ A(2,2)$

$$4 = 2p \cdot 2,\ p = 1, x^2 = 2y,\ y = \frac{x^2}{2},\ y' = x$$

$$l = \int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x = tgt \\ dx = \dfrac{dt}{cos^2 t} \\ t_1 = 0, t_2 = arctg2 \end{matrix} \right| =$$



$$\overline{1+tg^2 t}\,\frac{dt}{cos^2 t} = \int_0^{arctg2} \frac{dt}{cos^3 t} =$$

$$+\frac{1}{2} ln \left| tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \right| \Big|_0^{arctg2} == \sqrt{5} + ln\sqrt{\sqrt{5}-2}$$

Xulosa: Demak, aniq integralning mexanik xossalarini, hamda aniq integralning baholash haqidagi teoremasini bilish lozim. Aniq integralning geometrik ma`nosini bilish Egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi masalasiga qaytaydigan bo`lsak, (14.2) tenglikning o'ng tomoni integral yig'indidan iborat. U holda (14.5) formuladan *aniq integralning geometrik ma'nosi* kelib chiqishini bilish lozim.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. T. Sharifova, E. Yo'ldoshev. Matematik analizdan misol va masalalar yechish, "O'qituvchi", T., 1996.

2. A. Abdurahmonov, A. M. Abramov, A. A'zamov, M. Mirzaaxmedov va boshqalar. Yosh matematik qomusiy lug'ati, "Qomuslar bosh tahririyati", T., 1991.

3. A. Abduhamedov. Algebra va matematik analiz asoslari I qism, "O'qituvchi", T., 2001.

4. www.ref.uz www.google.co.uz