УДК 517.956.223

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

https://doi.org/10.5281/zenodo.11661334

К.Т.Каримов
М.Р.Муродова
Ферганский государственный университет

Аннотация. *В работе рассмотрено трехмерное уравнение с сингулярным коэффициентом в трехмерном слое. Найдены фундаментальные решения и доказано единственность решения задачи типа Дирихле.*

Ключевые слова*: задача Дирихле, фундаментальные решения, сингулярный коэффициент, трехмерное пространство*.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В области $\Omega = \{(x,y,z): -\infty < x,y < +\infty, 0 < z < l\}$ рассмотрим трехмерное уравнение эллиптического типа с сингулярным коэффициентом

$$Lu \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\gamma}{z}u_z = 0, \qquad (1)$$

где $u = u(x,y,z)$-неизвестная функция, а $l, \gamma \in R$, причем $0 < \gamma < 1/2$.

В области Ω уравнение (1) принадлежит эллиптическому типу. $z = 0$ является плоскостью сингулярности коэффициента уравнения.

В данной работе для уравнения (1) в трехмерной области Ω поставлена и исследована следующая задача.

Задача D_∞. Найти функцию $u(x,y,z) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и краевым условиям

$$u(x,y,0) = f_1(x,y), \quad (x,y) \in R^2, \qquad (2)$$

$$u(x,y,l) = f_2(x,y), \quad (x,y) \in R^2, \qquad (3)$$

$$\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} u(x,y,z) = 0, \quad z \in [0,l], \qquad (4)$$

где f_1, f_2 – заданные непрерывные функции и выполняются условия согласования $\lim\limits_{x^2+y^2 \to +\infty} f_i(x,y) = 0, \ i = \overline{1,2}$.

2. Фундаментальные решения.

Фундаментальные решения для некоторых уравнений эллиптического типа с сингулярными коэффициентами в плоскости и в пространстве построено в работе [1]. Приведем сведения из этой работы, косеющей нами.

Уравнения (1) рассматривается в полупространстве $z>0$. Находим фундаментальное решение этого уравнения и решение ищем в виде

$$u=\left(r_1^2\right)^{-\gamma-1/2}\omega(\sigma), \qquad (5)$$

где $\sigma=1-\dfrac{r^2}{r_1^2}$, $\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\}=\left(x-\xi\right)^2+\left(y-\eta\right)^2+\left(z\mp\zeta\right)^2.$

Подставляя (5) в уравнение (1), получим

$$\sigma(1-\sigma)\omega_{\sigma\sigma}+\left[2\gamma-\left(2\gamma+3/2\right)\sigma\right]\omega_\sigma-\gamma\left(\gamma+1/2\right)\omega=0. \qquad (6)$$

Это–уравнение Гаусса, которое в окрестности точки $\sigma=0$ имеет два линейно независимых решения:

$$\omega_1(\sigma)=F\left(\gamma,\gamma+1/2,2\gamma;\sigma\right), \qquad (7)$$

$$\omega_2(\sigma)=\sigma^{1-2\gamma}F\left(1-\gamma,3/2-\gamma,2-2\gamma;\sigma\right). \qquad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в (5), получим

$$q_1\left(x,y,z;\xi,\eta,\zeta\right)=k_1\left(r_1^2\right)^{-\gamma-1/2}F\left(\gamma,\gamma+1/2,2\gamma;\sigma\right), \qquad (9)$$

$$q_2\left(x,y,z;\xi,\eta,\zeta\right)=k_2\left(r_1^2\right)^{-\gamma-1/2}\sigma^{1-2\gamma}F\left(1-\gamma,3/2-\gamma,2-2\gamma;\sigma\right), \qquad (10)$$

где k_1 и k_2–некоторые постоянные. Эти функции по переменным (x,y,z) являются решениями уравнения (1), причем в силу известной формулы [2] $F(a,b,c;\sigma)=(1-\sigma)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c;\sigma)$ имеем

$$q_1\left(x,y,z;\xi,\eta,\zeta\right)=k_1\left(r_1^2\right)^{-\gamma}r^{-1}F\left(\gamma,\gamma-1/2,2\gamma;\sigma\right),$$

$$q_2\left(x,y,z;\xi,\eta,\zeta\right)=k_2\left(r_1^2\right)^{-\gamma}\sigma^{1-2\gamma}r^{-1}F\left(1-\gamma,1/2-\gamma,2-2\gamma;\sigma\right).$$

Отсюда следует, что при $r\to 0$ они имеют особенность и, значит, являются фундаментальными решениями уравнения (1). Нетрудно видеть, что

$$\lim_{z\to 0}z^{2\gamma}\frac{\partial}{\partial z}q_1\left(x,y,z;\xi,\eta,\zeta\right)=0,\quad \lim_{z\to 0}q_2\left(x,y,z;\xi,\eta,\zeta\right)=0.$$

3. Единственность решения задачи D_∞.

Теорема. Задача D_∞ не имеют более одного решения.

Доказательство. Пусть задача D_∞ имеет два решения $u_1(x,y,z)$ и $u_2(x,y,z)$, тогда $u(x,y,z)=u_1(x,y,z)-u_2(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению (1) и однородным краевым условиям. Докажем, что $u(x,y,z)\equiv 0$ в $\Omega\cup\{z=0\}\cup\{z=l\}$.

В области Ω справедливо тождество

$$z^{2\gamma}uLu=\left(z^{2\gamma}uu_x\right)_x+\left(z^{2\gamma}uu_y\right)_y+\left(z^{2\gamma}uu_z\right)_z-z^{2\gamma}\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2\right)=0.$$

Интегрируя это тождество по области $\Omega_{abcd}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}=\left\{(x,y,z):a<x<b,c<y<d,\varepsilon_1<z<l-\varepsilon_2\right\}$, где a,b,c,d –конечное число, причем $a<b,c<d$, а $\varepsilon_1,\varepsilon_2$–достаточно малые положительные числа, имеем

$$\iiint\limits_{\Omega_{abcd}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}}\left[\left(z^{2\gamma}uu_x\right)_x+\left(z^{2\gamma}uu_y\right)_y+\left(z^{2\gamma}uu_z\right)_z\right]dxdydz=$$

$$=\iiint\limits_{\Omega_{abcd}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}}\left[z^{2\gamma}\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2\right)\right]dxdydz. \qquad (15)$$

Если $\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0$, $a,c\to-\infty; b,d\to+\infty$, то $\Omega_{abcd}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\to\Omega$.

Применяя формулу Гаусса-Остроградского[3] к левой стороны равенства (15) имеем

$$\int\limits_{\varepsilon_1}^{l-\varepsilon_2}\int\limits_c^d\left[u(b,y,z)u_x(b,y,z)-u(a,y,z)u_x(a,y,z)\right]z^{2\gamma}dydz+$$

$$+\int\limits_{\varepsilon_1}^{l-\varepsilon_2}\int\limits_a^b\left[u(x,d,z)u_y(x,d,z)-u(x,c,z)u_y(x,c,z)\right]z^{2\gamma}dxdz+$$

$$+z^{2\gamma}\int\limits_a^b\int\limits_c^d\left[u(x,y,l-\varepsilon_2)u_z(x,y,l-\varepsilon_2)-u(x,y,\varepsilon_1)u_z(x,y,\varepsilon_1)\right]dxdy=$$

$$=\iiint\limits_{\Omega_{abcd}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}}\left[z^{2\gamma}\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2\right)\right]dxdydz.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0$, $a,c\to-\infty$, $b,d\to+\infty$, затем учитывая однородные краевые условия и свойства функции $u(x,y,z)$ при $x^2+y^2\to+\infty$, из последнего равенства получим

$$\iiint\limits_{\Omega}\left[z^{2\gamma}\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2\right)\right]dxdydz=0.$$

Следовательно, $u_x(x,y,z)\equiv u_y(x,y,z)\equiv u_z(x,y,z)\equiv 0$, $(x,y,z)\in\Omega$. Тогда $u(x,y,z)\equiv const$, $(x,y,z)\in\Omega$. Так как $u(x,y,z)\in C(\bar{\Omega})$ и $u(x,y,z)\big|_{z=0}\equiv 0$, то $u(x,y,z)\equiv 0$, $(x,y,z)\in\bar{\Omega}$. Отсюда следует утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Уринов А.К. Фундаментальные решения для некоторых уравнений эллиптического типа с сингулярными коэффициентами. Научный вестник ФерГУ. 2006. №1. 5-11.

2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипер-геометрические функции. Функции Лежандра. - М.: Наука, 1973. –296 с.

3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М., Высшая школа, 1981. т.II: 584 с.