IKKINCHI TARTIBLI PARABOLIK TIPDAGI TENGLAMALAR VA ULAR UCHUN ASOSIY CHEGARAVIY MASALALAR

https://doi.org/10.5281/zenodo.14181340

Qudratova Shahnoza Shuxrat qizi
Termiz Davlat Universiteti, Matematika fizika fakulteti Matematik analiz kafedrasi o'qituvchisi

KIRISH

Mazkur o'zgarish chizig'i xarakteristika bo'lmagan parabola-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar qaraladi. Mavzuni dolzarbligi shundaki: ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar tabiatda ro'y bergan fizik, mehanik, biologik va boshqa jaroyonlarni matematik ifodalashda kelgan. Shu sababli ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarni kassifikatsiyasini,kanonik ko'rinishga keltirishni o'rganish, ikkinchi tartibli giperbolik va parobolik tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalarni qo'yishni, ularning yechish usullarini o'rganish va o'tish chizig'i xarakteristika bo'lmagan aralash tipdagi masalalarni yechimini mavjudligi va yagonaligini ko'rsatish dolzarb masalalardan biridir.

Bundan tashqari giperbolik tipdagi tenglamalarni eng sodda vakili tor tebranish tenglamasi va unga qo'yilgan Koshi masalasi, Gursa masalasi va asosiy chegaraviy masalalar, ularning yechimi hamda yechish usullari, ikkinchi tartibli parabolic tipdagi issiqlik tarqalish tenglamasi uchun qo'yilgan asosiy chegaraviy masalalarni yechishda foydalanilga ekstremum prinsipi batafsil ko'rib chiqildi.

Giperbolik va parabolik tipdagi tenglamalar uchun Koshi masalasini, chegaraviy masalalarning qo'yilishini, yechish usullari: Fur'e metodi, Riman metodi, xarakteristikalar metodilari ko'rib chiqildi. Parabolik tipdagi tenglamalar uchun ekstremum prinsipi o'rganildi.Bundan tashqari Grin funksiyasi usuli va issiqlik potensiyallari bilan tanishib chiqildi. Tabiatda tebranishga bog'liq bo'lgan jarayonlarning matematik modeli giperbolik tipdagi ikkinchi tartibli xususiy hosilali tenglamalarga keladi. Giperbolik tipdagi tenglamalarning eng sodda vakili bu tor tebranish tenglamasidir.

Torning majburiy tebranishi tenglamasi

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$$

ko'rinishga ega. Agar bunda $f(x,t)=0$ bo'lsa,

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

eng sodda tor tebranish yoki to'lqin tarqalish tenglamasi deyiladi. Ba'zi hollarda torning erkin tebranish tenglamasi deb ham yuritiladi.

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + F = 0$$

tenglama uchun biror M nuqtada $B^2 - AC > 0$ bo'lgan holda

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B+\sqrt{B^2-AC}}{A}, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{B-\sqrt{B^2-AC}}{A}$$

tenglamalarga erishamiz. Bu tenglamalarning integrallari

$$\varphi(x,y)=const, \qquad \psi(x,y)=const$$

haqiqiy va turlicha boʻladi. Binobarin, (1.6) tenglama ikkita turli haqiqiy xarakteristikalarga ega.

Endi yangi oʻzgaruvchi ξ va η lar sifatida $\varphi(x,y)$ va $\psi(x,y)$ funksiyalar olinsa:

$$\xi=\varphi(x,y), \qquad \eta=\psi(x,y)$$

ular (1.5) tenglamani qanoatlantirib, (1.4) munosabatlarga koʻra $A_1=0,\ C_1=0$ boʻladi. Natijada (1.3) tenglama quyidagi

$$2B_1u_{\xi\eta}+F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)=0$$

koʻrinishga keladi. Keyingi tenglikdan quyidagini topamiz:

$$u_{\xi\eta}=F_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta), \qquad (1.1.1)$$

bunda

$$F_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)=-\frac{F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)}{2B_1}$$

boʻladi.

(1.1.1) tenglama giperbolik tipdagi tenglamaning kanonik koʻrinishini ifodalaydi.

Agar α va β oʻzgaruvchilarni

$$\alpha=\frac{\xi+\eta}{2}, \qquad \beta=\frac{\xi-\eta}{2}$$

deb olsak, giperbolik tenglama ushbu

$$u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}=F(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta)$$

koʻrinishga keladi. Bu giperbolik tipdagi tenglamaning ikkinchi kanonik koʻrinishidir. Shunday qilib, giperbolik tipdagi tenglama quyidagi

$u_{xx}-u_{yy}=F$ yoki $u_{xy}=F$

kanonik koʻrinishlarga ega boʻladi.[4] Endi giperbolik tenglama uchun qanday boshlang'ich chegaraviy masalalar qo'yish mumkinligini ko'ramiz.

Dastlab tor tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasini koʻrib chiqamiz.

Masalaning qoʻyilishi.

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \qquad (1.1.2)$$

tenglamaning $((x,t)\in D)$ $D=\{(x,t):-\infty<x<\infty, 0<t\le T\}$ sohada

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x) \\ u_t(x,0)=\Psi(x) \end{cases} \quad -\infty<x<\infty \qquad (1.1.3)$$

shartni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ yechimi topilsin. Tor tebranish tenglamasini (x,t) tekislikdagi biror D sohada qaradik.

Ta'rif. Agar $u(x,t)$ funksiya D sohada aniqlangan uzluksiz va ikki marta uzluksiz deffirersiallanuvchi bo'lib, shu sohada (1.1.2) tenglamani qanoatlantirsa, bu funksiya tor tebranish tenglamasining sohadagi regulyar (klassik) yechimi deyiladi. Yuqorida berilgan shartlardagi $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarni yetarlicha silliq funksiyalar deb hisoblaymiz.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

tenglamani kanonik ko'rinishga keltiramiz.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

$$A = a^2, \quad B = 0, \quad C = -1, \quad \Delta = A^2 - BC = 0 + a^2 = a^2 > 0 \ \frac{dy}{dx} = \frac{0 \pm a}{a^2}.$$

Bundan

$$dx = -adt, \qquad dx = adt$$

tenglamalarga ega bo'lamiz.Bularni integrallab, mos ravishda

$$x - at = c_1, \qquad x + at = c_2$$

(1.1.2) tenglamaning xarakteristikalariga erishamiz. (1.1.2) tenglamada

$$\xi = x - at, \qquad \eta = x + at \qquad (1.1.4)$$

almashtirishni bajaramiz. Natijada (1.1.2) tenglama

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

ko'rinishga keladi va uni

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0$$

ko'rinishda yozsa ham bo'ladi.

Oxirgi tenglikdan quyidagini topamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \omega(\xi),$$

bunda $\omega(\xi)$ - ixtiyoriy funksiya. Bu tenglamani yana bir bor integrallasak

$$u = \int \omega(\xi) d\xi + f_2(\eta)$$

bo'ladi, bunda $f_2(\eta)$ ixtiyoriy funksiya, yoki

$$\int \omega(\xi) d\xi = f_1(\xi)$$

deb belgilasak,

$$u(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

formulaga kelamiz. Bu formulada eski o'zgaruvchilar (x,t) larga qaytib, quyidagini topamiz

$$u(x,t) = f_1(x - at) + f_2(x + at) \qquad (1.1.5)$$

Agar f_1 va f_2 funksiyalar ikkinchi tartibli hosilalarga ega bo‘lsa, (1.1.5) formula bilan aniqlangan $u(x,t)$ funksiya (1.1.2) tenglamaning yechimi bo‘ladi. Shu bilan birga (1.1.5) dagi f_1 va f_2 funksiyalar aniq fizik ma’noga ega: $f_1(x-at)$ funksiya x o‘qining musbat yo‘nalishi bo‘yicha a tezlik bilan tarqalayotgan to‘g‘ri to‘lqinni ifodalaydi, $f_2(x+at)$ funksiya x o‘qining manfiy yo‘nalishi bo‘yicha a tezlik bilan tarqalayotgan teskari to‘lqinni ifodalaydi. Demak, (1.1.5) yechim to‘g‘ri va teskari to‘lqinlar yig‘indisidan iborat ekan.

Tor chegaralanmaganligi tufayli chegaraviy shartlar qo‘yilmaydi, lekin (1.1.3) shartdagi $\varphi(x),\psi(x)$ funksiyalar $-\infty<x<+\infty$ oraliqda berilgan bo‘ladi. Umumiy yechim (1.1.5) dagi f_1 va f_2 funksiyalar ixtiyoriy bo‘lganligidan, ularni $u(x,y)$ (1.1.5) shartlarni qanoatlantiradigan qilib tanlab olish mumkin. Shu maqsadda (1.1.3) va (1.1.4) dan topamiz.

$$\varphi(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

$$\psi(x)=-a\left[f_1'(x)-f_2'(x)\right]$$

yoki ikkinchi tenglikni integrallab

$$\left.\begin{aligned} &f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x)\\ &f_1(x)-f_2(x)=-\frac{1}{a}\int_0^x\psi(z)dz+c \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.6)$$

tenglamalar sistemasiga kelamiz. Bunda $c=const$.

(1.1.6) sistemani yechib topamiz:

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)=\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(z)\,dz+\frac{c}{2}$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)=\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(z)\,dz-\frac{c}{2}.$$

Bu topilgan qiymatlarni (1.1.4) ga qo‘yib, integrallarni birlashtirib ushbu *Dalamber formulasi*ga kelamiz:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz \qquad (1.1.7)$$

Bu (1.1.7) formula qo‘yilgan Koshi masalasining yechimi bo‘ladi. Bunda, albatta, $\varphi(x)$ ikkinchi tartibli, $\psi(x)$ birinchi tartibli uzluksiz hosilalarga ega deb faraz qilish kerak.

(1.1.2), (1.1.5) Koshi masalasining yechimi mavjud, yagona va turg‘un ekanligi bevosita (1.1.7) formuladan kelib chiqadi.

Tor tebranish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masala.

Masalaning qo‘yilishi.

$$u_{tt}=a^2u_{xx}$$

tenglamaning $((x,t)\in D)$ $D=\{(x,t):0<x<l,0<t\le T\}$ sohada

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \Psi(x) \end{cases} \quad 0 < x < l \qquad (1.1.8)$$

boshlang‘ich va

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u\ \ (l,t) = 0 \end{cases} \quad 0 \le t \le T \qquad (1.1.9)$$

chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ yechimi topilsin.

Qo‘yilgan birinchi chegaraviy masalani Fur’e metodi bilan yechamiz. Bu metod boshqa tipdagi tenglamalarni yechishda ham keng qo‘llaniladi.

(1.1.2) tenglamaning yechimini

$$u(x,t) = X(x)T(t) \qquad (1.1.10)$$

ko‘rinishda qidiramiz. Bunda X faqat x ning, T faqat t ning funksiyasi bo‘lib, $u(x,t) \ne 0$ bo‘lishi va (1.1.9) shartlarni qanoatlantirishi kerak. (1.1.10) ni (1.1.2) ga qo‘yib quyidagini topamiz:

$$T''(t)X(x) = a^2 X''(x)T(t)$$

yoki

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \qquad (1.1.11)$$

(1.1.11) tenglikning chap tomoni faqat t ga bog‘liq, o‘ng tomoni esa faqat x ga bog‘liq. Bu holda (10) tenglik, ikki tomoni ham biror o‘zgarmas songa teng bo‘lgandagina o‘rinli bo‘lishi mumkin.

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

(1.18) dan quyidagi ikki oddiy differensial tenglamalarni olamiz.

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \qquad (1.1.12)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \qquad (1.1.13)$$

Chegaraviy (1.1.9) shartlar bajarilishi uchun (1.1.10) ga asosan $X(x)$ funksiya

$$X(0) = 0\ , \qquad X(l) = 0 \qquad (1.1.14)$$

shartlarni qanoatlantirishi kerak va $X(x) \ne 0$ bo‘lishi shart, aks holda $u(x,t) = 0$ bo‘lib qoladi. λ parametrning shunday qiymatlarini topishimiz kerakki, (1.1.13) tenglamaning yechimi (1.1.14) shartlarni qanoatlantirsin va aynan nolga teng bo‘lmasin. λ parametrning bunday qiymatlari xos qiymatlar, unga mos kelgan yechim esa (1.1.13), (1.1.14) masalaning xos funksiyalari deyiladi.

(1.1.13), (1.1.14) masalaning o‘zi esa Shturm-Liuvill masalasi deb yuritiladi.

(1.1.13), (1.1.14) masalaning xos qiymatlari va xos funksiyalarini topish uchun bo‘lishi mumkin bo‘lgan uch hol: $\lambda < 0$, $\lambda = 0,$ $\lambda > 0$ ni alohida-alohida ko‘rib chiqamiz.

1) $\lambda < 0$ bo‘lsa, (1.1.13) tenglamaning umumiy yechimi

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

bo'ladi, C_1 va C_2 - ixtiyoriy o'zgarmas sonlar. Bu yechimni (1.1.14) chegaraviy shartlarga qo'ysak,

$$C_1 + C_2 = 0, \qquad C_1 e^{\sqrt{-\lambda} l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} l} = 0$$

bo'lib, undan $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, bu holda $X(x) \equiv 0$.

2) $\lambda = 0$ bo'lsa, (1.1.13) tenglamaning umumiy yechimi

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

bo'ladi va (1.21) shartlarga qo'ysak, yana $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ chiqadi, demak, $X(x) \equiv 0$

.

3) $\lambda > 0$ bo'lsa, (1.20) tenglamaning umumiy yechimi

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda} x + C_2 \sin\sqrt{\lambda} x$$

bo'ladi va uni (1.1.13) qo'ysak

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0, \qquad C_1 \cos\sqrt{\lambda} l + C_2 \sin\sqrt{\lambda} l = 0$$

kelib chiqadi. Bundan $C_1 = 0$ va $C_2 \sin\sqrt{\lambda} l = 0$ bo'lishini topamiz.

$C_2 = 0$ deb olsak, $X(x) \equiv 0$ bo'ladi. Shuning uchun

$\sin\sqrt{\lambda} l = 0,$ ya'ni $\sqrt{\lambda} = \dfrac{k\pi}{l}$

deymiz, bunda k-ixtiyoriy butun son. Demak (1.1.13), (1.1.14) masalaning noldan farqli yechimi faqatgina

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

qiymatlarda mavjud bo'lar ekan.

Bu λ_k xos qiymatlarga

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l}$$

xos funksiyalar mos keladi.

Endi topilgan λ_k qiymatlarni (1.1.12) tenglamaga qo'yib, tenglamani yechsak

$$T_k(t) = a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}$$

bo'ladi, bunda a_k va b_k lar ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

$X_k(x)$ va $T_k(t)$ larni (1.1.13) ga qo'yib quyidagini topamiz:

$$u_k(x,t) = X_k(x) T_k(t) = \left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right) \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Bu $u_k(x,t)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ funksiyalarning har biri (1.1.2) tenglamani va (1.1.9) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi. (1.1.2) tenglama chiziqli va bir jinsli bo'lgani uchun quyidagi

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l}+b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad (1.1.15)$$

qatorning har bir hadi tekis yaqinlashuvchi hamda u_{tt}, u_{xx} hosilalarga mos kelgan qatorlar ham tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, qatorning yig'indisi $u(x,t)$ ham (1.1.2) tenglamani va (1.1.9) shartlarni qanoatlantiradi.

Endi ixtiyoriy o'zgarmas sonlar bo'lgan a_k va b_k larni topish hisobiga (1.1.15) formula bilan aniqlangan $u(x,t)$ funksiyani (1.1.8) boshlang'ich shartlarga bo'ysindiramiz. (1.22) ni t bo'yicha differensiallab topamiz:

$$u_t=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}\left(-a_k\sin\frac{k\pi at}{l}+b_k\cos\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}. \qquad (1.1.16)$$

(1.1.15) va (1.1.16) da $t=0$ deb, (1.1.8) ga asosan topamiz:

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi x}{l}, \quad \psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}b_k\sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (1.1.17)$$

Bu $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarning $(0,l)$ oraliqdagi sinuslar bo'yicha Fur'e qatoriga yoyilmalaridir. U holda bizga ma'lumki,

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx, \quad b_k=\frac{2}{2\pi a}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx \qquad (1.1.18)$$

bo'ladi.

Demak, qaralayotgan (1.1.2)-(1.1.8) masalaning yechimi (1.1.15) qator bo'lib, u yerdagi a_k, b_k lar (1.1.18) formulalar orqali topiladi. Buning uchun $[0,l]$ da berilgan $\varphi(x)$ funksiya uch marta, $\psi(x)$ funksiya ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lishlari va

$$\varphi(0)=\varphi(l)=0, \quad \varphi''(0)=\varphi''(l)=0, \ \psi(0)=\psi(l)=0$$

shartlarni qanoatlantirsa, (1.1.15) qator va uni x,t lar bo'yicha ikki martadan differensiallaganda hosil bo'ladigan qatorlar tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Topilgan yechim (1.1.15) qatordan turli hulosalarni chiqarish mumkin. Masalan tor nuqtalarining xarakati garmonik tebranishlardan iborat bo'ladi, tovushlar yo musiqali, yo musiqasiz bo'ladi - birinchisi notalar, ikkinchisi shovqinlar deyiladi. Turli musiqali asboblarni yasashda bu yerdan kelib chiqadigan qator xulosalar keng qo'llaniladi.

XULOSA

Ushbu tadqiqot ishida matematik-fizikani masalalari o'rganildi. Tadqiqot mavzusini o'rganish jarayonida bu sohaning asosiy tushunchalarini o'rganishdan boshlandi. Ishning ikkinchi qismida asosiy tushuncha va birinchi bo'limda o'rganilgan masalalarni yechish metodlaridan foydalangan holda aralash tipdagi tenglamalar uchun masalalarni qo'yilishi va yechimlarini mavjudligi, yagonaligi teoremalarni isbotlashni asosiy bobida integral tenglamalarning asosiy tushuncha, ta'riflar va teoremalarini o'rganishdan boshladim va asosiy masalani qo'yib,uning yechimini yagonaligi va mavjudligi isbotlandi.

FOYDANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. O'zbekiston Respublikasi "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi" Toshkent. 29.08.97yil ta'sdiqlngan.

2. O'zbekiston Respublikasi "Magistratura to'g'risidagi nizomi" Toshkent. 29 oktabr 2012 yil ta'sdiqlngan.

3. Salohiddinov M. Matematik fizika tenglamalari. "O'zbekiston" nashriyoti. T. 2002 y.

4. Бизадзе А.В. Уравнения математической физики.М.Наука.1976г. 291с.

5. Тихонов А.Н, Самарский А.А. Уравнения математической физики.М.Наука.1977г.

6. Jo'rayev T.J, Abdunazarov S. Matematik fizika tenglamalari "O'zbekiston" nashriyoti. T. 2003 y.