OPERATOR TIP KOEFFITSIENTLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

https://doi.org/10.5281/zenodo.14720566

Abdusalomov Sherzodjon Inomjon o'g'li
Sobirjonov Behzod Qahramon o'g'li
FARG'ONA DAVLAT UNIVERSITETI
MATEMATIKA – INFORMATIKA FAKULTETI
Amaliy matematika(sohalar bo'yicha)yo'nalishi
Magistarturaning 2-bosqich talabalari

Abstract: *Jahon miqyosida olib borilayotgan ko'plab ilmiy-amaliy tadqiqotlar natijasida vujudga keladigan muammolarning yechimlari integral va differensial tenglamalarga keltiriladi. Ushbu maqolada bugungi kunda, kubatur, kvadratur formulalarni qurish va ularni tatbiq etish bo'yicha bir qator, jumladan: differensiallanuvchi funksiyalarning Gilbert fazolarida kvadratur, kubatur formulalarning xatolik funksionallari ekstremal funksiyalarini topish.*

KIRISH

Mustaqillik yillarida mamlakatimizda amaliy tatbiqqa ega bo'lgan dolzarb yo'nalishlarga e'tibor kuchaytirildi, xususan, hisoblash matematikasining kubatur formulalar nazariyasi bo'yicha yuqori algebraik aniqlik darajasiga ega bo'lib, biror bir muntazam ko'pyoqning aylanishlar gruppasi akslantirishlariga nisbatan invariant hamda ortogonal elementlar nazariyasiga asoslangan Gauss tipidagi kvadratur formulalarni qurishga alohida e'tibor qaratildi. Hosilasi kvadrati bilan integrallanuvchi davriy va davriy emas, bir va ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning Gilbert fazolarida panjarali optimal kvadratur formulalar qurish sezilarli natijalarga erishild.Ushbu ishda to'g'ri kasr tartibining integral tenglamasini taxminiy echish uchun kvadratik formulalarning maqbul koeffitsientlari topildi, bundan tashqari, Gilbert fazosidagi kvadratik formulalarning xatoligi uchun funktsional normaning kvadrati hisoblab chiqildi.

Kalit so'zlar : *Singulyar integral, Gilbert fazosi,Ermit va normal operatorlar, Furye koeffitsientlari, kvadratur formula, Skalyar ko'paytma Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi.*

OPERATOR TIP KOEFFITSIENTLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR.

Biz bu ushbu maqolada differensial-operator tenglamalarga qo'yilgan masalalarni shartli korrektlikga tekshiramiz va ularni taqribiy yechimlarini ko'ramiz . Shuning uchun bu mavzuni bayon etishda foydalanadigan ba'zi bir tushuncha va teoremalarni imkoni boricha isbotsiz S.G.Kreyn va M.M.Lavryentyev, L.Ya.Savelyev asarlariga asoslanib keltiramiz.

CHEGARALANMAGAN OPERATORLAR

Gilbert fazolari. *H* Gilbert fazosi deb, norma $||x||^2=(x,x)$ skalyar ko'paytma bilan aniqlangan Banax fazosiga aytiladi .

Skalyar ko'paytma deganda quyidagi xossalarga ega (x,y) $(x, y\in H)$ funksional tushuniladi.

1) $(x,y)>0$, agarda $x\neq 0; (x,x)=0 \Leftrightarrow x=0;$

2) $(x,y)=(y,x);$

3) $(x_1+x_2, y)=(x_1, y)+(x_2, y);$

4) $(\lambda x, y)=\lambda(x, y).$

Ushbu Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi o'rinli

$|(x,y)|\leq\|x\|\|y\|.$

Agar $(x,z)=0$ bo'lsa, *x* va *z* elementlar $(x, z\in H)$, ortogonal deyiladi . *z* element H_1 qism fazoga ortogonal deyiladi ,agar u H_1 qism fazoning har bir elementiga ortogonal bo'lsa.

Faraz qilaylik, H_1 , *H* ning qism fazosi bo'lsin, u holda *H* ning har bir *x* elementini birdan-bir imkoniyat bilan $x = y+z$ ko'rinishda ifodalash mumkin , bu yerda $y\in H$, y esa x elementining H_1 dagi proyeksiyasi deb ataladi : $y=P_{H_1}x$.

Butun fazo ikkita o'zaro ortogonal qism fazolar yig'indisiga (ortogonal yeg'indiga) yoyiladi : $H=H_1\oplus M$, bu yerda M H_1 qism fazoga ortogonal elementlar to'plami.

Rissning Gilbert fazosida chiziqli funksionalning umumiy ko'rinishi haqidagi teoremasi o'rinli:

H Gilbert fazosidagi $f(x)$ ixtiyoriy chiziqli funksional birdan-bir ushbu ko'rinishda ifodalanadi :

$f(x)=(x,u),$ bu yerda $u\in H.$ (1)

Va teskarisi, (1) ko'rinishga ega bo'lgan har qanday funksional H fazodagi chiziqli funksional bo'ladi va $||f|| = ||u||$.

Bu bilan qo'shma H^* fazo va berilgan H fazo orasida bog'liqlik o'rnatiladi. Bu bog'liqlik $f\leftrightarrow u$ esa izomorfizm bo'lmaydi , chunki

$(\lambda f)(x)=\lambda f(x)=\lambda(x,u)=(x,\bar{\lambda}u),$

ya'ni $\lambda f\leftrightarrow\bar{\lambda}u.$

Shuning uchun bu kamchilikni yo'qotish maqsadida , qo'shma H^* fazoda skalyarga ko'paytirish quyidagi ko'rinishda aniqlanadi :

$(\lambda f)(x)=\bar{\lambda}f(x).$

U holda H^* qo'shma fazo *H* ga izometrik bo'ladi.

Ermit va normal operatorlar . Faraz qilay , *A* chiziqli operator *H* o'zini-o'ziga akslantirilsin. U holda unga qo'shma bo'lgan A^* operator ham H ni H ga akslantiradi va quyidagicha aniqlanadi

$$(Ax,y)=(x,A^*y).$$

Yuqoridagi skalyarni funksionalga ko'paytirish qoidasidan kelib chiqqan holda ta'kidlaymizki , qo'shma operatorning spektri boshlang'ich operatorning spektriga qarab haqiqiy o'qga nisbatan simmetrik joylashadi .

Agar $A=A^*$ bo'lsa, A o'z-o'ziga qo'shma operator deyiladi. O'z-o'ziga qo'shma operatorning spektri haqiqiy sonlar o'qida joylashgan yopiq sohadir . O'z-o'ziga qo'shma operatorga mos keluvchi (Ax,x) kvadratik forma faqat haqiqiy qiymat qabul qiladi.

A operatorning normasi ushbu

$$\|A\|=\sup_{x\in H,\|x\|\neq 0}\frac{|(Ax,x)|}{(x,x)}$$

$\dfrac{(Ax,x)}{(x,x)}$ ifoda qiymatining aniq quyi va yuqori chegarasi *A* operator spektrining quyi va yuqori chegarasi bilan ustma-ust tushadi. Har qanday $A:H\to H$ operatorga $\varphi(x)=(Ax,x)$ funksionalni mos qo'yish mumkin.

Agar $\varphi(x)=(Ax,x)>0$ barcha $x\neq 0$ bo'lsa ,o'z-o'ziga qo'shma A operator musbat deyiladi , agar $\varphi(x)=(Ax,x)\geq k(x,x)\ (k>0)$, bo'lsa musbat aniqlangan deyiladi.

P_{H_1} bilan yuqoridagidek har bir elementga uning berilgan qism fazo H_1 dagi proyeksiyasini mos qo'yuvchi ortogonal proyeksiyalash operatorini belgilaymiz . P_{H_1} o'z-o'ziga qo'shma operatorga misol bo'laoladi . Ortogonal proyeksiyalash operatorlari ushbu hususiyatlarga ega: $P^2=P\ va\ P^*=P$.

Agarda $H_1\subset H_2$ bo'lsa, u holda $P_{H_2}P_{H_1}=P_{H_1}P_{H_2}=P_{H_2}$.

Chegaralangan chiziqli operator $A:H\to H$ izometrik deyiladi , agar u skalyar ko'paytmani saqlasa , ya'ni

$$(Ax,Ay)=(x,y\in H).$$

Skalyar ko'paytmani saqlash o'rniga $\|Ax\|=\|x\|\,(x\in H)$ normani saqlashni talab qilish mumkin.

Haqiqatan ,bu talablarni ekvivalentligi quyidagi tengliklardan

$$\mathrm{Re}(Ax,Ay)=4^{-1}(\|A(x+y)\|^2-\|A(x-y)\|^2)=4^{-1}(\|(x+y)\|^2-\|(x-y)\|^2)$$

Va xuddi shunday tengliklar mavhum qism uchun o'rinli ekanligidan (y ni iy bilan almashtirsak)kelib chiqadi.

Agar izometrik operatorning teskarisi A^{-1} mavjud bo'lsa , *A* unitar operator deyiladi. Unitar operator uchun $A^*=A^{-1}$ o'rinli .

Unitar operatorning spektri birlik aylanada yotadi. Unitar operatorlar ko'paytmaga nisbatan gruppa tashkil etadi.

Endi *A* chiziqli(birjinsli va additiv , lekin chegaralanmagan bo'lishi mumkin)operator bo'lib uning aniqlanish sohasi $D(A)\,H$ da zich joylashgan ,ya'ni $\overline{D(A)} = H$ (bu yerda ustidagi chiziq *H* metrikasi bo'yicha yopiqlikni bildiradi).

A operatorga qo'shma operatorni ushbu formuladan aniqlaymiz

$(Ax, y) = (x, A^* y)$,

bu yerda *y* elelment shundayki , uning uchun

$|(Ax, y)| \le c \| x \|^2$ barcha $x \in D(A)$ o'rinli

Bunday formada aniqlangan qo'shma operqtor yagonadir.

Agar *A* operator yopiq bo'lsa ,u holda A^* operatorning aniqlanish sohasi $D(A^*)H$ fazoda zich joylashgan bo'ladi . Bu bilan A^{**} operator birdan bir aniqlanadi va u *A* operatorning yopig'i bilan ustma-ust tushadi:

$A^{**} = \overline{A}$.

λ kompleks tekisligi nuqtasi *A* operatorning regulyar tur nuqtasi deyiladi ,agar

$\| (A - \lambda I)x \| \ge a \| x \| \ (x \in D(A), a > 0)$

bo'lsa .

λ regulyar tur nuqta bo'lib va A operator yopiq bo'lsa ,u holda $A - \lambda I$ operatorning qiymatlar sohasi qism fazo tashkil etadi . Unga ortogonal to'ldiruvchi defekt qismfazo deb ataladi, uning o'lchovi esa λ nuqtaga mos keluvchi *A* operatorning deffektlik indeksi deb ataladi.

Agar deffektlik indeksi nolga teng bo'lsa ,u holda λ regulyar nuqta bo'ladi.

H da zich joylashgan aniqlanish sohasiga ega bo'lgan *A* chiziqli operator simmetrik deyiladi ,agar barcha $x, y \in D(A)$ uchun ushbu tenglik o'rinli bo'lsa :

$(Ax, y) = (x, Ay).$

Misol 1. $H = L_2(\Omega)$ da ushbu integral operatorini qaraymiz

$$Ku = \int_{\Omega} K(x, y) u(y) dy \qquad (15.2)$$

Quyidagi *2m* o'lcho'vli integral

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} K^2(x, y) u(y) dx dy$$

chekli deb faraz qilamiz.Bunday operator butun fazoda aniqlangan .

Agar

$K(x, y) = K(y, x)$

bo'lsa ,(15.2)operator simmetrik ekanligini isbotlaymiz.Skalyar ko'paytmani tuzamiz

$$(Ku,v)=\int_{\Omega} v(x)\left\{\int_{\Omega} K(x,y)u(y)dy\right\}dx.$$

Fubini teoremasiga asosan interallar o'rnini almashtiramiz

$$(Ku,v)=\int_{\Omega} u(x)\left\{\int_{\Omega} K(x,y)u(y)dx\right\}dy.$$

Mos ravishta *x* ni *y* ga , *y* ni *x* ga belgilashlarni almashtirib topamiz

$$(Ku,v)=\int_{\Omega} u(x)\left\{\int_{\Omega} K(y,x)u(y)dy\right\}dx=\int_{\Omega} u(x)\left\{\int_{\Omega} K(x,y)v(y)dy\right\}dx=(Kv,u)=(u,Kv)$$

chunki fazoda ko'paytma ko'paytuvchilari tartibini haqiqiy fazoda o'zgartirish mumkin .

Misol 2. $H=L_2(0,1)$ fazosida ushbu operatorni qaraymiz

$$Au=-\frac{d^2u}{dx^2}.$$

A operatorning *D(A)* aniqlanish sohasini quyidagicha aniqlaymiz : $u\in C^2[o,1], u(0)=u(1)=0$.

Bunday aniqlangan operator chiziqli bo'lib,uning simmetrik ekanligini isbotlaymiz.

Yuqorida aniqlangan $C^2[0,1]$ dan olingan $D(A)$ to'plam $L_2(0,1)$ fazoda zich joylashgan finit funksiyalar to'plamini o'z ichiga oladi . Undan tashqari $D(A)$ o'zi $L_2(0,1)$ da zich joylashgandir .

Endi *A* operatorini simmetrik ekanligini isbotlash qoladi .Buning uchun ushbu (Au,v) skalyar ko'paytmani qaraymiz ,bu yerda $u,v\in D(A)$,ya'ni $u,v\in C^2[0,1],\ u(0)=u(1)=0,\ v(0)=v(1)=0$.

Bo'laklab integrallaymiz va chegaraviy shartlarni e'tiborga olib ,ushbu tenglikni

$$(Au,v)=-\int_0^1 u'(x)v'(x)dx=\int_0^1 u(x)v''(x)dx=(u,Av)$$

topamiz .Simmetrik operatordan doim yopiq operator hosil qilish mumkin. Simmetrik operatorga qo'shma operator uning o'zining kegaytirilganidir. Tekislikning haqiqiy bo'lmagan nuqtalari simmetrik operator uchun regulyar tur nuqtalardir.Tekislikning yuqori va quyi qismlariga alohida-alohida deffektlik indekslari deb ataladi. Agar bu indekslardan biri nolga teng bo'lsa, simmetrik operator maksimal deb ataladi. Maksimal simmetrik operator trivial bo'lmagan kengayishga ega emas.Agarda simmetrik operatorning indeksi nolga teng bo'lsa,u holda u o'z-o'ziga qo'shma operatordir:

$$D(A)=D(A^*)\ va\ (Ax,y)=(x,Ay)\ \ x,y\in D(A).$$

Simmetrik operator o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lishi uchun hech bo'lmaganda bitta haqiqiy regulyar nuqtaga ega bo'lishi yetarlidir.

Simmetrik operatorning *H* fazosida o'z-o'ziga qo'shma operatorgacha kegayishi uchun uning teng defektlik sonlarga ega bo'lishi zarur va yetarlidir .

Agar $D(A)=H$ bo'lsa,o'z-o'ziga qo'shma operator : $A: D(A) \rightarrow H$ Ermit operatori deb ataladi.Shunday qilib ta'rifga muvofiq Ermit operatori shunday simmetrik operatorki ,uning uchun $A: H \rightarrow H$ bo'lib ,quyidagicha

$$(Ax, y)=(x, Ay) \quad (x, y \in H).$$

tenglik o'rinli.

Misol uchun haqiqiy xos sonlarga ega diagonalli matritsa operator Ermit operatoridir.

Agar *A* operator yopiq ba uchbu $AA^{**}=A^{*}A$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda *A* operator normal operator deyiladi.Bu ta'rifdan

$$\| Ax \| = \| A^* x \| \quad (x \in D(AA^*)=D(AA^*))$$

Tenglik kelib chiqadi $R: H \rightarrow H, S: H \rightarrow H$ Ermit operatorlarini va $A=R=iS,\ A^{*}=R-iS$ ni qaraylik.

Agar $RS=SR$ bo'lsa, $AA^*=A^*A$ tenglikni ko'rsatish qiyin emas .

Shunday qilib , operatorning haqiqiy va mavhum qismlarini o'rin almashtiruvchan ekanligi operator normal bo'lishining kriteriyasidir .

Agar

$$1) E_{\lambda} \quad \lambda \ bo'yicha\ chapdan\ kuchli\ uzluksiz;$$

$$2) E_{\lambda}E_{\mu}=E_{\mu}E_{\lambda}=E_{\lambda} \quad \lambda<\mu \ bo'\lg anda;$$

$$3)\ E_{-\infty}=\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_{\lambda}=0 \quad E_{+\infty}=\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_{\lambda}=I,$$

bu yerda limit kuchli ma'noda tushuniladi, o'rinli bo'lsa, $E_{\lambda}(-\infty<\lambda<+\infty)$ ortogonal proyeksiyalash operatorlar oilasi birning spectral yoyilmasi deyiladi.

Har bir, $(-\infty, +\infty)$ o'qda berilgan chegaralangan uzliksiz $F(\lambda)$ funksiya uchun Stilyes operatorli integralini aniqlash mumkin

$$\int_a^b F(\lambda) dE_{\lambda}. \qquad (15.3)$$

Agar [*a,b*] chekli bo'lsa , bu integral $\sum_{k=1}^{N} F(\lambda_k)(E_{\lambda_{k+1}}-E_{\lambda_k})$ integral yig'indilar limiti sifatida aniqlanadi va agar $a=-\infty$ yoki $b=+\infty$ bo'lsa, xosmas integral sifatida ta'riflanadi. (15.3) formula bilan aniqlangan operator chegaralangan operatordir,chunki

$$\left| \int_a^b F(\lambda) dE_{\lambda} \right| \leq \sup_{a \leq \lambda \leq b} |F(\lambda)|$$

bo'ladi.

Agar $F(\lambda)$ haqiqiy va chegaralanmagan bo'lsa , ma'lum kerakli ma'no berilgandan keyin (15.3) integral o'z-o'ziga ko'shma , umuman aytganda , chegaralanmagan operatorni beradi. Uning aniqlanish sohasi faqat shunday *x* lardan iboratki , ular uchun ushbu

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 \, d(E_\lambda x, x) < \infty$$

tenglik o'rinli.

Har qanday *A* o'z-o'ziga qo'shma operatorga E_λ qandaydir 1-ning spectral yoyilmasi mos keladi va $X \in D(A)$ da

$$Ax = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda x.$$

E_λ operatorlar *A* operator bilan kommutatsiya qiladigan (joy almashadigan)operatorlar bilan kommutatsiya qiladi.

Agar *A* operator chegaralangan bo'lib , *m* va *M* uning spektrini quyi va yuqori chegaralari bo'lsa , u holda $E_\lambda = 0$, agar $\lambda \le m$ bo'lsa, va $E_\lambda = I$,agar $\lambda > M$ bo'lsa.

Shunday qilib,

$$Ax = \int_{m}^{M+0} \lambda dE_\lambda x.$$

Agar *A* operator musbat aniqlangan va $(Ax, x) \ge \alpha(x, x)$ bo'lsa, u holda

$$Ax = \int_{a}^{\infty} \lambda dE_\lambda x$$

bo'ladi.

XULOSA

Ushbu ishda eksponent Operator tip koeffitsientli differensial tenglamalar ko'rib chiqildi . Dastlab, ushbu Gilbert fazosi haqida tushuncha va qoidalarni eslab oldik, funktsional xato normasini hisoblash uchun ekstremal funktsiya topildi. Keyin, chegaralanmagan operatorlar orqali bir nechta yangi o'zgaruvchilarni qabul qilib olindi. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan foydalanib elementlar Gilbert fazosida ortogonalmi yoki yo'qligini aniqladik. Rissning Gilbert fazosida chiziqli funksionalning umumiy ko'rinishi haqidagi teoremasi o'rinli bo'lganligi uchun har qanday funksional H fazodagi chiziqli funksional bo'ladi. Ermit va normal operatorlardan foydalangan holda barcha funksionallarni soddalashtirdik. Nihoyat, optimal farq topildi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. *Шадиметов Х.М., Далиев Б.С.* Экстремальная функция квадратурных формул для приближенного решения обобщенного интегрального уравнения Абеля. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. є2(20), 2019, с. 88-95.

2. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М. 1974. 808с

3. *Шадиметов Х.М., Далиев Б.С.* Коэффициенты оптимальных квадратурных формул для приближенного решения общего интегрального уравнения Абеля. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. є2(26) 2020, с. 24-32.

4. *Kh.Shadimetov, B.Daliyev* Composite optimal formulas for approximate integration of weight integrals // AIP Conference Proceedings. 2020, 20p.

5. Israilov M.I., Shamsiev E.A. Nekotorыe kubaturnыe formulы dlya shestimernogo prostranstva // Voprosы vычisl. i prikl. matematiki: Sb. nauch. tr. – Tashkent: IK AN RUz, 1983. - vыр. 71. - S. 3-14.

6. Shamsiddinovich, M. R., & Obidjonovich, Z. N. (2021). Advantages and Improvements of ETextbook Teaching of Computer Science in General Secondary Educatin. CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES, 2(12), 71-74.

7. Shushbaev S.Sh., Shamsiev E.A. Postroenie kubaturnых formul, invariantnых otnositelno grupp selochislennых avtomorfizmov sovershennых kvadratichnых form // Dokladы AN Uzbekistana. – Tashkent, 1982. - № 3. - S.

8. Begaliyevich, N. C., Obidjonovich, N. Z., & Bahodir og'li, A. O. (2022). SOLVING MULTIDIMENSIONAL PROBLEMS WITH A WEAK APPROXIMATION METHOD. Galaxy International Interdisciplinary Research Journal, 10(5), 949-955.

9. Ismatullaev G.P. O postroenii kubaturnых formul dlya gipershara i poverxnosti sferы // Voprosы vычisl. i prikl. matematiki: Sb. nauch. tr. – Tashkent: IK AN RUz, 1975. - vыр. 32. - S. 60-68.

10. Nurmatov, Z., To'rayev, D., & Pirimova, F. (2023). TIXONOV BO 'YICHA KORREKTLIK VA KORREKTLIK TO 'PLAMI. NORMAL YECHIMNI TOPISHNING REGULYARLASHTIRISH USULI. Евразийский журнал академических исследований, 3(5 Part 3), 28-37.