

УДК 532.546+517.519

**MATHEMATICAL MODELS OF FILTRATION OF ANOMALOUSLY NONLINEAR FLUIDS IN
A THREE-LAYER FORMATION**

<https://doi.org/10.5281/zenodo.15244141>

Kayumov S.

*Tashkent State Technical University named after Islam Karimov,
Tashkent, Uzbekistan*

Ziyadullayeva S. S.

*Tashkent State Technical University named after Islam Karimov,
Tashkent, Uzbekistan*

Bekchanov S. E.

*Tashkent State Technical University named after Islam Karimov,
Tashkent, Uzbekistan*

Khudoyberdiyev A.

*Tashkent State Technical University named after Islam Karimov,
Tashkent, Uzbekistan*

Abstract: *The article is devoted to modeling the process of anomalous fluid filtration obeying the curvilinear filtration law in a three-layer reservoir. A computational algorithm is developed and tested on test data.*

Keywords: *model, filtration, fluid, curvilinear, three-layer, layer, computational, algorithm.*

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ АНОМАЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ
ФЛЮИДОВ В ТРЕХСЛОЙНОМ ПЛАСТЕ**

Каюмов Ш.

*Ташкентский государственный технический университет имени Ислама
Каримова, Ташкент, Узбекистан.*

Зиядуллаева Ш.С.

*Ташкентский государственный технический университет имени Ислама
Каримова, Ташкент, Узбекистан.*

Бекчанов Ш.Э.

sherzodbekjonov@gmail.com

*Ташкентский государственный технический университет имени Ислама
Каримова, Ташкент, Узбекистан.*

Худойбердиев А.

*Ташкентский государственный технический университет имени Ислама
Каримова, Ташкент, Узбекистан.*

Аннотация: Статья посвящена к моделированию процессу фильтрации аномальных флюидов подчиняющегося криволинейному закону фильтрации в трехслойном пласте. Разработан вычислительный алгоритм и на тестовых данных апробирован.

Ключевые слова: модель, фильтрация, флюид, криволинейный, трехслойный, пласт, вычислительный, алгоритм.

Работа посвящена к построение математических моделей процесса фильтрации нелинейных флюидов в слоистых пластах. Так как пористые среды является многослойными структурами с чередующимся пластовыми характеристиками, то для их изучения можно использовать, слоистые математические модели, учитывающие эти особенности. В истории исследовании задачи фильтрации флюидов различных структур, существует многочисленные работы [1-5], как в одно пластовых, так и многопластовых системах [4]. Нами рассмотрена трех пластовая пористая среда, где средняя хорошо проницаемая пласт (горизонтальные характеристики преобладает над вертикальными) а две соседние (верхний и нижние) плохо проницаемые пласты (вертикальные характеристики, преобладает над горизонтальными) [5-7]. Считается что средний пласт, содержит аномальный флюид (где существует две зоны фильтрация с неизвестными подвижными границами), и одновременно с началом отбора флюида из среднего пласта происходит перетек из соседних пластов в среднюю (см. рис. 1.) Предполагается, что состояния флюида насыщающая средний пласт такова, что там можно использовать криволинейный закон фильтрации. Для однообразия, считаем что и соседние пласты тоже насыщено, неньютоновскими флюидами допускающей использование, криволинейный формы аппроксимации, функционала связи скорости фильтрации с градиентом давление.

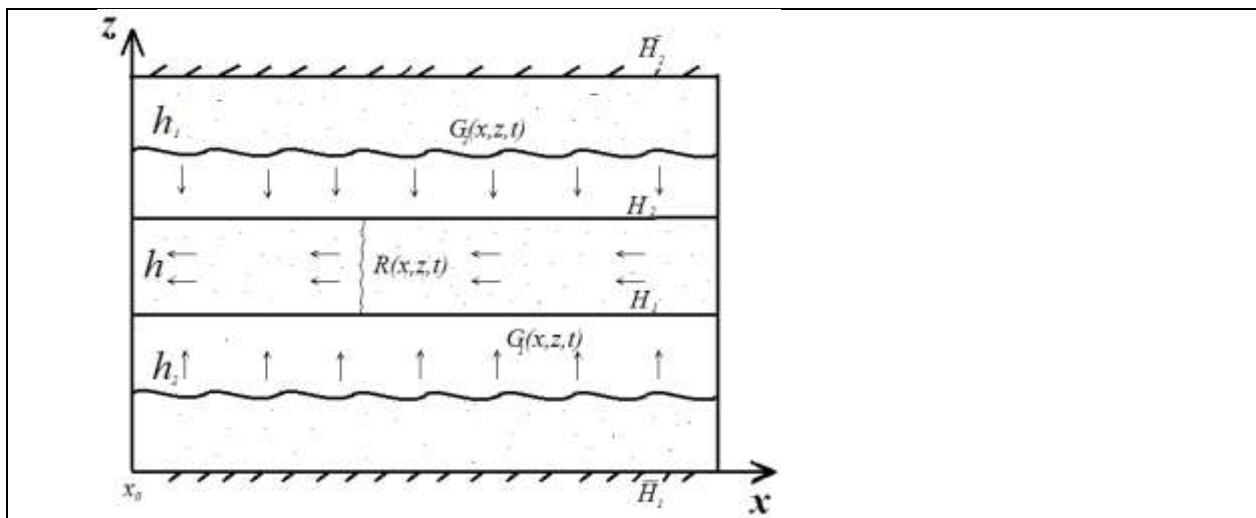


Рис.1. Схематичный вид трехслойной пористой среды насыщенный аномально нелинейными флюидами.

Криволинейный закон предполагает нелинейности фильтрации в области малых градиентов давлений.

Математическое моделирование физической задачи такого типа в научной литературе не достаточно изучены, особенно когда во всех пластах, происходит движения флюида в форме криволинейной аппроксимации [6,7,8]. Таким образом естественно возникает, интерес изучить динамика такого пласта и найти соответствующие технико-экономические эксплуатационные параметры разработки.

Выше изложенная физическая задача, математически формулируется так:

Необходимо найти непрерывные функции $U(x, \bar{z}, t)$ и $V_i(\bar{x}, z, t)$ $i = \overline{1, 2}$ а также подвижные границы $R(x, \bar{z}, t)$, $G_i(\bar{x}, z, t)$ удовлетворявшие следующую начально краевую задачу:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K \cdot h}{\mu} \left(1 - \frac{\gamma_0 \beta}{|\nabla U|} \right) \frac{\partial U}{\partial x} \right) + Q(x, t) = M \frac{\partial U}{\partial t}, \quad x \in (x_0, R(x, t)), t > 0. \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Kh}{v} \frac{|\nabla U|}{\beta + \sqrt{\beta^2 + |\nabla U|^2}} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + Q(x, t) = M \frac{\partial U}{\partial t}, \quad x \in (R(x, t), L), t > 0. \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{K_i \cdot h_i}{\mu_i} \left(1 - \frac{\gamma_0 \beta_i}{|\nabla V_i|} \right) \frac{\partial V_i}{\partial z} \right) = M_1 \frac{\partial V_i}{\partial t}, \quad z \in (H_i, G_i(z, t)), t > 0. \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{K_i h_i}{v_i} \frac{|\nabla V_i|}{\beta_i + \sqrt{\beta_i^2 + |\nabla V_i|^2}} \frac{\partial V_i}{\partial z} \right) = M \frac{\partial V_i}{\partial t}, \quad z \in (G_i(z, t), \bar{H}_i), i = \overline{1, 2}, t > 0. \quad (4)$$

с начальными условиями

$$U(x, \bar{z}, 0) = U_0(x, \bar{z}, 0), \quad V_i(\bar{x}, z, 0) = V_{i_0}(\bar{x}, z, 0), \quad (5)$$

$$R(x, \bar{z}, 0) = R_0(x, \bar{z}), \quad G_i(\bar{x}, z, 0) = G_0(\bar{x}, z), \quad i = \overline{1, 2} \quad (6)$$

условия на подвижных границах

$$\left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=R-0} = \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=R+0} = \beta, \quad U(x, \bar{z}, t)|_{x=R-0} = U(x, \bar{z}, t)|_{x=R+0} \quad (7)$$

$$\left| \frac{\partial V_i}{\partial z} \right|_{z=G_i-0} = \left| \frac{\partial V_i}{\partial z} \right|_{z=G_i+0} = \beta_i, \quad V_i(\bar{x}, z, t)|_{z=G_i-0} = V_i(\bar{x}, z, t)|_{z=G_i+0} \quad (8)$$

а также с условиями на неизвестных подвижных границах области:

$$\alpha_1 \frac{K \cdot H}{\mu} (1 - \gamma_0 \beta) \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = \varphi_1(t), \quad \alpha_2 \frac{K \cdot H}{v} \frac{|\nabla U|}{\beta + \sqrt{\beta^2 + |\nabla U|^2}} \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=L} = \varphi_2(t), \quad (9)$$

$$\bar{\alpha}_i \frac{K_i \cdot H_i}{\nu_i} \frac{|\nabla V_i|}{\beta_i + \sqrt{\beta_i^2 + |\nabla V_i|^2}} \frac{\partial V_i}{\partial z} \Big|_{x=\tilde{H}_i} = \varphi_i(t), \quad i = \overline{1, 2}. \quad (10)$$

$$\text{Здесь } Q(x, t) = b_1 \frac{K_1 \cdot h_1}{\mu_1} \left(1 - \frac{\gamma_0 \beta_1}{|\nabla V_1|} \right) \frac{\partial V_1}{\partial z} \Big|_{z=H_1+0} - b_3 \frac{K_3 \cdot h_3}{\mu_3} \left(1 - \frac{\gamma_0 \beta_3}{|\nabla V_3|} \right) \frac{\partial V_3}{\partial z} \Big|_{z=H_2-0}.$$

В задачах (1)-(10): k, k_1, k_2 - проницаемости, h, h_1, h_2 - мощности пластов, β, β_1, β_2 - коэффициенты, выражающие аномальности флюидов (градиентные сдвиги), μ, μ_1, μ_2 - вязкости флюидов, ν, ν_1, ν_2 - динамическая вязкости, $\alpha_1, \alpha_2, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2$ - коэффициенты регулирующие размерности уравнений в соответствии с пластовыми характеристиками. $M = M(x, U), M_1 = M_1(z, V_1), M_2 = M_2(z, V_2)$ функции выражающие типы флюидов,

$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \psi_1(t), \psi_2(t)$ заданные функции, описывающие мощности источников.

Задачи (1)- (10) относятся к нелинейным задачам теории фильтрации аномальных флюидов и аналитическое решение данных задач прямом виде не существует.

Задачи (1) - (10) решаются численно с использованием приближенных методов [9].

Введем обозначение

$$W_{x,1} = \frac{K \cdot h}{\mu} \left(1 - \frac{\gamma_0 \beta}{|\nabla U|} \right) \frac{\partial U}{\partial x}, \quad W_{z,i} = \frac{K_i \cdot h_i}{\mu_i} \left(1 - \frac{\gamma_0 \beta_i}{|\nabla V_i|} \right) \frac{\partial V_i}{\partial z} \quad (11)$$

$$W_{x,2} = \frac{K \cdot h}{\nu} \frac{|\nabla U|}{\beta + \sqrt{\beta^2 + |\nabla U|^2}} \frac{\partial U}{\partial x}, \quad W_{z,2} = \frac{K_i \cdot h_i}{\nu_i} \frac{|\nabla V_i|}{\beta_i + \sqrt{\beta_i^2 + |\nabla V_i|^2}} \frac{\partial V_i}{\partial z}, \quad i = \overline{1, 2}. \quad (12)$$

тогда (1) - (2) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} W_{x,1} + b_1 W_{z,1} \Big|_{z=H_1+0} - b_3 W_{z,2} \Big|_{z=H_2-0} = M \frac{\partial U}{\partial t}, \quad x \in (x_0; R(x, t)), t > 0. \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} W_{x,2} + b_1 W_{z,1} \Big|_{z=H_1+0} - b_3 W_{z,2} \Big|_{z=H_2-0} = M \frac{\partial U}{\partial t}, \quad x \in (R(x, t); L), t > 0. \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} W_{z,i} = M_i \frac{\partial V_i}{\partial t}, \quad z \in (H_i; G_i(z, t)), t > 0. \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} W_{z,2,i} = M_i \frac{\partial V_i}{\partial t}, \quad z \in (G_i(z, t); \tilde{H}_i), t > 0. \quad (16)$$

Условия (5) - (8) пока оставим, так как записано исходной постановке. При этом условия на естественных границах (9) - (10) записывается так:

$$\alpha_1 W_{x,1} = \varphi_1(t), \quad \alpha_2 W_{x,2} = \varphi_2(t), \quad (17)$$

$$\bar{\alpha}_1 W_{z,i} \Big|_{z=\tilde{H}_i} = \psi_i(t), \quad i = \overline{1, 2}. \quad (18)$$

В дальнейшем это потоковая краевая задача (11) - (18) решается сеточными методами. Сначала уравнения (13) - (14) интегрируется по переменному x на

интервале $[x_i, x_{i+1}]$, а уравнения (15) - (16) по переменному z на интервале $[z_j, z_{j+1}]$ и метод прямых по переменному t , на интервале $[t_k, t_{k+1}]$.

В результате получим

$$(W_{x,r})_{i+1} - (W_{x,r})_i + \Delta x_{i+1} b_1 (W_{z,1})_i \Big|_{z=H_1-0} - \Delta x_{i+1} b_3 (W_{z,2})_{i+1} \Big|_{z=H_1-0} = \tilde{M} (u_{i+1}^{k+1} - u_{i+1}^k), \quad (19)$$

где $\tilde{M} = \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta t_{k+1}} M$, $r = \overline{1, 2}$.

$$(W_{z,r})_{j+1} - (W_{z,r})_j = \tilde{M}_r (V_{r,j+1}^{k+1} - V_{r,j+1}^k), \quad \tilde{M}_r = \frac{\Delta z_{j+1}}{\Delta t_{k+1}} M_r, \quad r = \overline{1, 2}. \quad (20)$$

Начальные условия (5) - (6), а также условия на границах (7)-(8) тоже можно записать относительно сеточных узлов (i, j, k) .

Тогда мы получим сеточную краевую задачи относительно потоков $(W_{x,r})_i$ и $(W_{z,r})_j$. Это задача решается с использованием потокового варианта сеточной прогонки [9,10] подробности которого здесь не излагаем, но даём описательном виде:

-сначала нелинейные члены в задаче (1) - (10) линеаризуются с использованием метода итерации.

-считая в (19) начальное значение перетоков из плохо проницаемых областей в среднюю пласт равно нулю, решается и находят значение потоков и искомых функций давлений в среднем пласте.

-используя полученный результат среднего пласта решает сеточный алгоритмы соответствующей к уравнениям для обоих соседних пластов.

-эти результаты используются как величины перетоков для основного пласта и задача решается заново для момента t_1 .

- в ходе решение проводится, поиск положения подвижных границы.

-так как задача решается итерационном режиме, то решение полученное при $t = t_1$, используется для проведения расчетов для следующих $t = t_2$, как нулевые и т.д.

-решение проводится до $t = t_n$, исходя из динамику состояние флюидов в пласте а также от цели намеченной исследователем (или заказчиком).

Заметим, что, проведение процессов итерации, отвечавшие к исходной постановки задачи, относительно искомых функции, а также определения положения подвижных границ, требует тщательной организации вычислительного процесса. При этом для подвижных границы используется метод челночных итераций [10], хорошо зарекомендовавшего в свое время для задачи фильтрации аномальных флюидов.

Вычислительные алгоритмы апробирован на следующих гипотетических данных:

$a_1 = 1, a_2 = 0, b_1 = b_2 = 1, \varphi_1 = 50; 100 \text{ т/с}, k_1 = k_2 = 0.004, k = 0.18; \mu_1 = \mu_2 = 0.01; \mu = 0.1;$
 $v_1 = 0.1; v_2 = 0.01; m_1 = 0.017, m = 0.27, m_2 = 0.017, U = V_1 = V_2 = 1.$

Частичные результатов расчета приведена на рис. 2 и 3, где дано, графики изменения давление в среднем пласте и функции перетока в верхнем пласте.

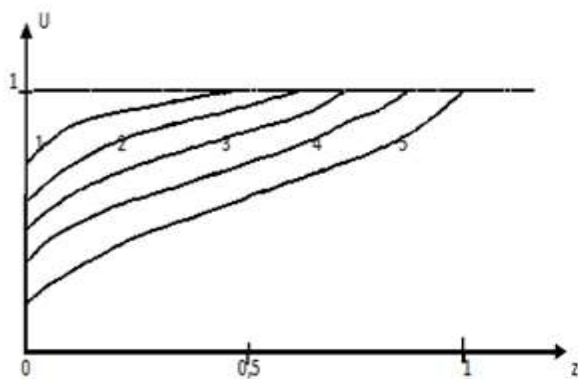


Рис. 2

Распределение давление в среднем пласте при:
 $t = 0,1; t = 0,2; t = 0,3; t = 0,4; t = 0,5.$

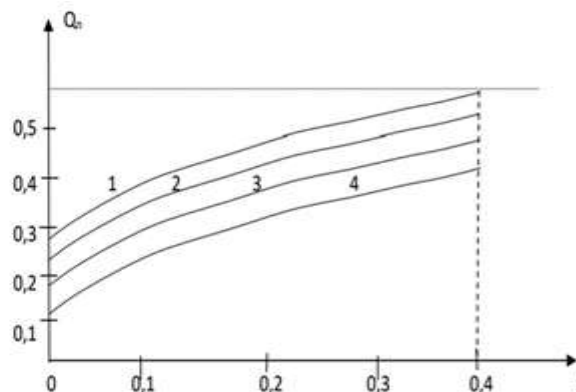


Рис. 3

График изменение функции перетока из верхнего пласта в средний
 $t = 0,1; t = 0,2; t = 0,3; t = 0,4.$

Таким образом построение вычислительные алгоритмы и их использование на тестовых данных позволить сделать вывод о возможности использование данной работы для определения техники экономических показателей трех пластовых месторождений флюидов имеющие данные аналогично к выше изученной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарный фильтрации жидкости и газа. М.: Недра. 1972. 288 с.
2. Филлипов А.Н., Зеленова М.А. Некорректность задачи о поле давления в слоисто неоднородном пласте при заданном отборе. Материалы международной конференции „Современные проблемы математической физики". Стерлитамак. 2021. с.118-124.
3. Равшанов Н., Аминов С.М. Моделирование многофазной фильтрации в многослойной деформируемой пористой среде // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2023. – №1(46). – С. 5-30.
4. Коновалов А.Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. _Новосибирск. Наука, 1988.-166 с.
5. Бурнашев В.Ф., Кайтаров З.Д. Математическое моделирование многофазной фильтрации с учетом деформации пористой среды. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2022. №3(41) с.5-20.

6. Sh.Kayumov, A.Mardonov, A.Kayumov, T.Xaitov. Mathematical model of the conduct of Newtonian and structural Fridays in hidrodynamically based forms. AP Conference processes 15 March 2023: 2612 (1): 030009, <https://doi.org/10.10963/5.0118573>.

7. Каюмов Ш., Бекчанов Ш.Э., Зиядуллаева Ш.С. О фильтрации структурированных флюидов в гидродинамически связанных многослойных пластах. Материалы конференции «Современные проблемы анализа». 2-3 июнь 2023 г. Карши, с.301-303.

8. Kayumov Sh., Arziqulov G., Bekchanov Sh., Ziyadullayev Sh. A multiparameter mathematical model for the problem of nonlinear filtration of fluids in two-layer media //Journal of Physics. Conference series 2697 (2024) 012042.IOP doi: 10.1089/1742-6596/2697/1/012042.

9. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М. Наука, 1989, 484 с.

10. Каюмов Ш. Математическое моделирование задач теории фильтрации нелинейных флюидов. Монография. LAP Lambert Academic Publishing Ru. 2024. 315 с.