

ИСПОЛЬЗУЙТЕ АЛГОРИТМ ФУРЬЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

<https://doi.org/10.5281/zenodo.10019283>

Маниёзов Ойбек Азатбоевич

Ассистент Ферганского филиала ТАТУ

Аннотация: В данной статье с помощью эллиптических операторов решаются нелинейные дифференциальные уравнения гиперболического типа с граничными условиями с помощью прямого и обратного преобразования Фурье.

В данной работе исследуется следующий вопрос.

Уравнение

$$u_{tt} = L_x u + f(x, t, u(x, t)) \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \Phi(x), \quad u_t(x, 0) = \Psi(x). \quad (2)$$

удовлетворяющие условиям

$u(x, t) \in C(R^n \times R^+)$ найдите функцию

Здесь

$$L_x(u) = \sum_{j=0}^h \frac{\partial}{\partial x_j} \left(p_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$$

эллиптический оператор, $p_j(x) \geq 0$

Мы изучаем следующую задачу для случая, когда $n = 2$, и при применении этой задачи она доказывается и для случая, когда n — произвольный предел, а также $n = 2$.

этого уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + f(x, y, t, u(x, y, t)) \quad x, y \in R^2 \quad t \in R^+ \quad (1')$$

$\Omega = R^2 \times R$ так что сейчас

$$u(x, y, 0) = \Phi(x, y) \quad u_t(x, y, 0) = \Psi(x, y) \quad (2')$$

найти решение, удовлетворяющее начальным условиям.

Вот и все

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + f(x, y, t) \quad (3)$$

находим решение уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям. Для этого необходимо решить задачу (1)-(2).

$$u(x, y, t) = v(x, y, t) + w(x, y, t) \quad (*)$$

мы ищем слепого.

Это $v(x, y, t)$ работает

$$1) u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} \quad (4)$$

решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям и $w(x, y, t)$ функции, имеет вид:

$$2) u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + f(x, y, t) \quad (5)$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = 0 \quad (6)$$

решает проблему. При этом $u(x, y, t)$ пусть уравнение (3) является решением, удовлетворяющим условиям (2).

это в виду, мы решаем эти проблемы с помощью преобразований Фурье. Преобразования Фурье задаются следующими формулами.

$$\bar{F}(\lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\lambda\xi + \mu\eta)} F(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (\text{я})$$

$$F(\lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\lambda\xi + \mu\eta)} \bar{F}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (\text{II})$$

Здесь F преобразование Фурье \bar{F} является обратным преобразованием Фурье. Здесь показаны решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям (2), и решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям (6). [6]

(3), удовлетворяющее условиям (2), состоит из суммы решений уравнений (4) и (5)

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \int_0^{2\pi} (\Phi(\xi, \eta) + \Psi(\xi, \eta)) \frac{r}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \iint_{r \leq t-\tau} \frac{f(\xi, \eta, \tau)}{\sqrt{(t-\tau) - r^2}} d\xi d\eta \quad (7)$$

появится. Если ввести в (7) следующие обозначения.

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \int_0^{2\pi} (\Phi(\xi, \eta) + \varphi(\xi, \eta)) \frac{r}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr d\varphi;$$

$$G(\tau, u(\tau)) = \frac{1}{2\pi} \iint_{r \leq t-\tau} \frac{f(\xi, \eta, \tau)}{\sqrt{(t-\tau) - r^2}} d\xi d\eta$$

посмотри в мои глаза

$$u(x, y, t) = F(t) + \int_0^t G(\tau, u(\tau)) d\tau, \quad t \in [0; \infty) \quad (8)$$

будет как

Таким образом, основная проблема состоит в том, чтобы найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2). Когда наше уравнение однородно, его решение имеет вид (7), если оно неоднородно, его решение имеет вид (8).

Теперь обратимся к изучению уравнения (8). Для исследования существования и единственности решения уравнения (8) воспользуемся следующей вспомогательной леммой и теоремой.

Лемма: пусть $I \subset \mathbb{R}^+$ — интервал, содержащий нуль и $t \in I$ — $W: I \rightarrow \mathbb{R}^+$ непрерывная функция и $M, \eta \in \mathbb{R}$ для всех, $M > 0$ и $\eta > 0$

$$(\beta) \quad W(t) \leq \eta + \int_0^t W(s) ds \text{ пусть неравенство выполнено. В таком случае } \forall t \in I \text{ для}$$

с

$$(\beta\alpha) \quad W(t) \leq \eta e^{M|t|} \text{ неравенство актуально.}$$

Описание: $\Omega \in \mathbb{R}$, $\Omega' \in \mathbb{R}$ открытые множества, $f: \Omega \times \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ некоторое отражение f . Будем говорить, что отражение удовлетворяет условию Липшица на $S \times S' \subset \Omega \times \Omega'$ множестве $x \in \Omega$, ($S \subset \Omega, S' \subset \Omega'$) если $\exists M > 0$ оно существует и неравенство выполняется $x' \in S'$ равномерно $\|f(x, x') - f(y, x')\| \leq M \|x - y\|$ для всех. Кроме того, если $\alpha(x') > 0$

Говорят, что функция удовлетворяет условию Липшица, даже если неравенство f выполнено $\|f(x, x') - f(y, x')\| \leq \alpha(x')\|x - y\|$.

Теорема: $\Omega \in R^2$, $\Omega' \in R^2$ открытые наборы, $I \subset R$ быть открытым интервалом и принять 0 и $f: \Omega \times I \times \Omega' \rightarrow R$ $f \in C(\Omega \times I \times \Omega')$ двумерное непрерывное отображение: мы обозначаем $\Omega \times I \times \Omega'$ точку в $(x, t, z) \cdot ((x, t, z) = (x_1, x_2, \dots, x_n, t, z_1, z_2, \dots, z_m))$ Пусть функция удовлетворяет f условию Липшица на t, z произвольных $K \subset \Omega, K' \subset \Omega'$ компактах $K \times I \times K'$ равномерно x по.

Затем идет интервал между $z \in K'$ необязательным $x_0 \in \Omega$ и $K' \subset \Omega'$ компактным $I_0 = \{t: |t| < E\}$ для необязательного.

$$(\gamma) \quad f(x(t, z), t, z) = \frac{\partial x(t, z)}{\partial t}, \quad x(0, z) = x_0 \text{ является единственным непрерывным,}$$

удовлетворяющим условию $I_0 \rightarrow \Omega, t \rightarrow K(t, z)$ Есть отображение. Кроме того, $I_0 \times K' \rightarrow \Omega$ рефлекторное $(t, z) \rightarrow x(t, z)$ отображение является непрерывным.

Теорема: 1) пусть $G(x, y, t, u)$ функция удовлетворяет условиям Каратеодори. 2)

$$\|G(x, y, t, u) - G(x, y, t, v)\| \leq C(x, y, t)\|u - v\| \text{ здесь } \int_0^t \left(\int_{R^2} C|x, y, t|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt < +\infty$$

$$3) \int_0^t \left(\int_{R^2} |G(x, y, t) \cdot u(x, y, t)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} dt < +\infty$$

$$4) \Phi(x, y), \psi(x, y) \text{ функции и их интегралы Фурье } \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_0^{2\pi} \Phi(\xi, \eta) \frac{r}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr d\varphi < +\infty$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_0^{2\pi} \psi(\xi, \eta) \frac{r}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr d\varphi < +\infty \text{ быть сходящимися.}$$

Тогда решение уравнения (8) существует и единственно.

Доказательство $u(t) \equiv z(t)$ единственности $t \in [0; \infty)$: Пусть уравнение (8) имеет еще одно $u = z(t)$ решение (вектор-функция) $t \in [0; \infty)$, удовлетворяющее условиям (2) $u(t), z(t)$.

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(\tau, u(\tau)) d\tau, \quad z(t) = u_0 + \int_0^t f(\tau, z(\tau)) d\tau$$

Для дальнейшего рассмотрения модуль вектор-функции, неравенство Коши, инварианты Лагранжа и условия Липшица

$$|f(t, u(t)) - f(t, z(t))| \leq nL|u(t) - z(t)| \text{ мы используем В результате } \tau \in [0, t] \text{ все в порядке}$$

$$\|u(t) - z(t)\| = \left\| \int_0^t f(\tau, u(\tau)) d\tau - \int_0^t f(\tau, z(\tau)) d\tau \right\| \leq \left\| \int_0^t |f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, z(\tau))| d\tau \right\| \leq nL \int_0^t \|u(\tau) - z(\tau)\| d\tau$$

$$\|u(t) - z(t)\| \leq nL \int_0^t \|u(\tau) - z(\tau)\| d\tau \text{ мы получаем неравенство. Отсюда } [0; t] \text{ следует, что}$$

даже $u(t) \equiv z(t)$ если мы применим лемму Гронуолла $[0; t]$ на интервале доказываем так же, как и выше, что доказывает единственность решения.

Существование решения [1], [3], [4], [5] указано в.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д.Х.Каримов,Б.Скалонов. Оприближенном рещении смесчанной задасхи для одного квазилинейного вырождающегося уравнения выссшего порядка «Исоледования по п проблемам физико-математисхеских наук», Сборник наусхниных трудов Тасхкенцкого ГПИ им,Низоми,1978г,том №240 стр.4-10
2. К.Б.Бойкузиев. Дифференциал тенгламалар. Тосхкент-«Укитувсхи» 1983й ,350 бет.
3. Г.И.Схандиров. Об одном обобщении неравенства Гронуолла и его применениях.Усхеные записки АзГУ,серия физ.мат и хим. наук, №6, 1958г Баку.
4. К.Х.Схабадиков. О разресхимости смесчанной задасхи для одного нелинейного уравнения схетвертого порядка и непрерывной зависимости рещения от параметра. «Исоледования по п проблемам физико-математисхеских наук», Сборник наусхниных трудов Тасхкенцкого ГПИ им,Низоми,1978г,том №240 стр.23-28
5. Нарасимхон Р. Анализ на действительных икомплексных многообразиях. Москва «Мир» 1971г,231 стр
6. Б.М.Будак. А.А.Самарский, А.Н.Тихонов Сборник задасх по математисхеской физике. Масква 1972г,687 стр
7. Nasriddinov, O., Maniyozov, O., & Bozorqulov, A. (2023). XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNING UMUMIY YECHIMNI TOPISHNING XARAKTERISTIKALAR USULI. *Research and implementation*.
8. Jo'raeva, D. (2022). BUZILADIGAN ODDIY DIFFERENTSIAL TENGLAMA UCHUN BIRINCHI CHEGARAVIY MASALA. O'ZBEKISTONDA FANLARARO INNOVATSIYALAR VA ILMIY TADQIQOTLAR JURNALI, 2(13), 456-461
9. Saidov, M., & Isoilov, S. (2023). TO'RTINCHI TARTIBLI BIR JINSLI BO'LMAGAN TENGLAMA UCHUN ARALASH MASALA. *Research and implementation*
10. Yusupov, Y. A., Otaqulov, O. H., Ergashev, S. F., & Kuchkarov, A. A. (2021). Automated stand for measuring thermal and energy characteristics of solar parabolic trough concentrators, *Appl. Sol. Energy*, 57, 216-222.